

高雄市 110 年度第 40 屆國民中小學科學園遊會國昌國中

《巧思解數謎，巧手創黃金》成果報告書

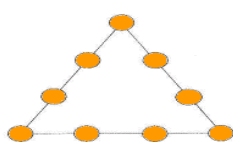
學校名稱	高雄市 國昌國中		
活動名稱	巧思解數謎，巧手創黃金		
執行期間	110 年 10 月 25 日		
執行地點	圖書館三樓及 E 化教室	參與人數	約 200 人
指導老師	王佩錡、陳琦迪 老師	連絡電話	07-3644300

一、活動主旨

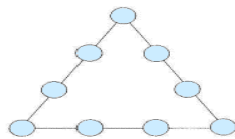
福祿貝爾 (Froebel, 1782-1852) 說：「遊戲始於快樂，終於智慧」。本活動的目的在於透過遊戲引起學生的學習興趣，讓學生獲得數學內容與思維方法。透過實際動手操作，引發學生觀察、探索及分析，並增進學生運用邏輯思考以解決問題的能力，提升學生數學素養，更希望學生能進一步欣賞到數學的奧妙與美。

二、活動器材

【活動一】三角形題目紙、數字磁鐵。



(圖一)



(圖二)



【活動二】A4 紙張半張(從短邊中點連線裁一半)、圓規 1 支、尺 1 把、鉛筆 1 支。



(圖三)



(圖四)



(圖五)

三、活動內容(過程)

【活動一】巧思解數謎

1. 遊戲規則：

在每個三角形上的圓圈內，分別放入 1-9 的數字磁鐵，每個數字只能放一次，且三角形三邊的數字和必需相等。

任務(1) 請排出每邊數字和為最大的排法。

任務(2) 請排出每邊數字和為最小的排法。

2. 過關標準：至少完成一個任務即可過關。

【活動二】巧手創黃金

1. 遊戲規則：

★請任選以下任務並完成：

任務(1) 看著已完成的圖片，假設最小正方形邊長為 1 單位長，依序算出所有正方形的邊長，從中觀察規律並說出費波納契數列。

任務(2) 依照提示步驟及關主示範，摺出黃金(分割)矩形及七個正方形。

任務(3) 依照提示步驟及關主示範，畫出等角螺線。

★提示步驟：

(1) 將 A4 紙張的短邊中點連線對摺，並沿摺痕裁成一半。

(2) 取裁好的半張 A4 紙，將短邊對摺至長邊後，沿著紙張邊緣畫線，攤開後得到一個正方形 ABCD。如圖六。

(3) 將正方形 ABCD 左右對摺一半後攤開，得到摺線 EF 及兩個矩形。如圖七。

(4) 以 F 點為圓心，矩形 EFCD 的對角線(線段 FD)長為半徑畫弧，交紙張最長邊於 G 點。過 G 點摺出垂直於紙條最長邊的直線 GH。將多餘的紙張裁去。如圖八、圖九、圖十。圖十為一個黃金比例的矩形。

(5) 沿著線段 BD 將正方形 ABCD 對摺，接著將 DH 邊對折至 CD 邊上，假設交點為 I，並沿著紙的邊緣描出 IJ 線段。如圖十一。

(6) 將 JG 邊對折至 JI 邊上，假設交點為 K，並沿著紙的邊緣描出 KL 線段。

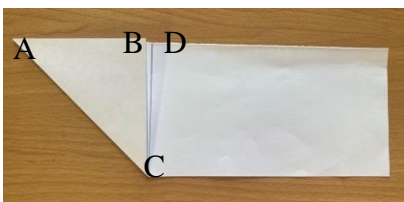
如圖十二。

(7)分別以 I、K 點為圓心，線段 IK 為半徑畫弧，交線段 IC 及線段 KL 於 M、N 兩點，連線段 MN。

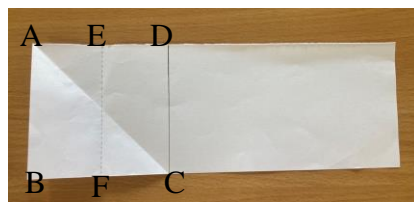
(8)同理，分別以 I、M 點為圓心，線段 IM 為半徑畫弧，交線段 IK 及線段 MN 於 O、P 兩點，連線段 OP。如圖十五。

(9)同理，分別以 O、K 點為圓心，線段 OK 為半徑畫弧，交線段 OP 及線段 KN 於 Q、R 兩點，連線段 QR。如圖十六。此時由小到大依序得到甲、乙、丙、丁、戊、己、庚，共七個正方形。

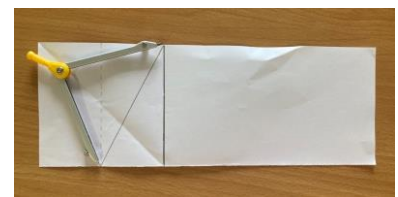
(10)分別以 R、P、N、K、I、C 為圓心，各正方形的邊長為半徑畫 1/4 圓弧，即可得到等角螺線。如圖十七。



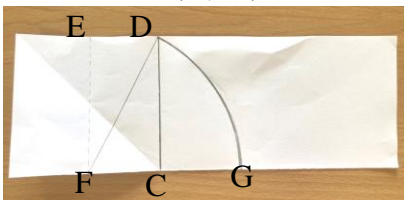
(圖六)



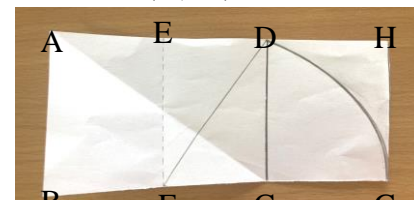
(圖七)



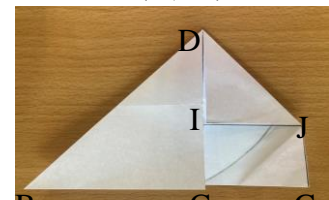
(圖八)



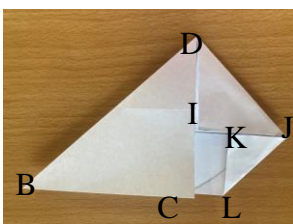
(圖九)



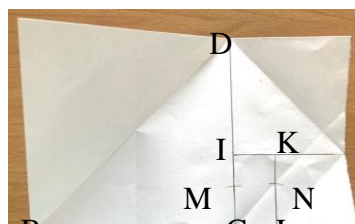
(圖十：黃金比例矩形)



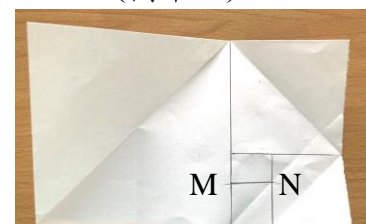
(圖十一)



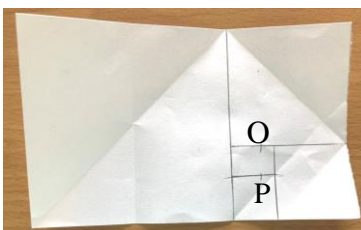
(圖十二)



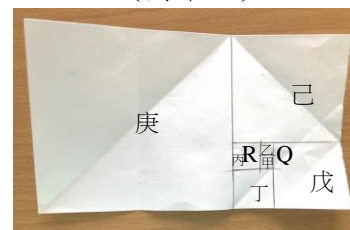
(圖十三)



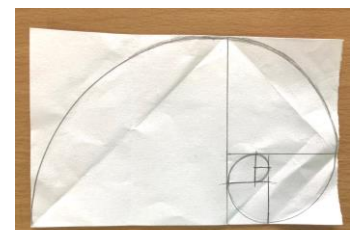
(圖十四)



(圖十五)



(圖十六)



(圖十七：等角螺線)

★為配合防疫，使用過的紙張不重複使用，闖關後可將作品帶走，留作紀念，回家後可自行上色使之更為美觀。

2. 過關標準：

任務(1)由小到大說出所有正方形的邊長，觀察並說出費波納契數列的規律。

任務(2)依摺出黃金(分割)矩形及至少五個正方形。

任務(3)畫出等角螺線。

以上三個任務，完成至少一項即可過關。任務(2)(3)的作品可帶回家作紀念。

★兩種關卡每完成一項任務，可獲得獎勵貼紙一張，五項任務皆通過者可獲得小禮物一份！

四、活動啟示(或原理探討)

【活動一】巧思解數謎

1. 將三個頂點放上最大的三個數，將 1~9 數字和再加上 7、8、9 三數，所得總和除以 3，即可得每邊長的最大總和為 23，再依總和將其餘六數放入即可。
2. 將三個頂點放上最小的三個數，將 1~9 數字和再加上 1、2、3 三數，所得總和除以 3，即可得每邊長的最小總和為 17，再依總和將其餘六數放入即可。
3. 學生可運用等差級數的公式來快速計算數字總和。

【活動二】巧手創黃金

1. 透過觀察及操作，引導學生發現費氏數列，認識生活中的數學。
2. 透過摺紙，訓練學生手部肌肉，並認識直尺、圓規的操作方式，替將來八年級的尺規作圖單元做準備。
3. 透過活動，讓學生體會到黃金比例構圖的奧妙與美感。
4. 認識數學名詞
 - (1) 費波納契數列

費氏數列是 1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,等，我們可以用以下遞迴關係式表示：設 $f(n)$ 表示費氏數列的第 n 項，則

$$f(1)=1, f(2)=1, n \neq 3 \text{ 時}, f(n)=f(n-1)+f(n-2)$$

(2) 黃金比例(分割)

黃金比例 (golden ratio) 也稱為黃金分割 (golden section) 公元前 6 世紀古希臘的畢達哥拉斯學派開始研究其規則，也發現無理數，側重於從數學關係去探討美的規律，並認為美就是和諧與比例，按照這種比例關係就可以組成美的圖案。若將一條線分成兩部分，較長的一段與較短的一段之比等於全長與較長的一段之比，它們的比例大約是 1.618:1，此比例就稱為黃金比例。知名的費氏數列也體現了這個數學原則，按此種比例關係組成的任何事物都表現出和諧與均衡。公元前 300 年左右歐幾里德進一步論述了黃金分割，中世紀後，黃金比例被稱為神聖比例，到 19 世紀逐漸出現黃金分割的名稱，20 世紀時美國數學家馬克·巴爾給它個名字叫 φ (phi)。

若 a 、 b 兩個數值構成黃金比例，即 $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \varphi$ 。

經化簡， $1 + \frac{b}{a} = 1 + \frac{1}{\varphi} = \varphi$ ， $\varphi + 1 = \varphi^2$ ， $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$ ，

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \doteq 1.6180339887\dots$$

(3) 等角螺線

等角螺線是個很特別的螺旋線，每一段放大或縮小，都可以跟自己的另一段完美重疊。發現這個規律數學家 Jakob Bernoulli 還在墓碑上留下了這個性質的詮釋：「雖然某些狀況改變了，我卻保持不變。」這樣的「同樣模式等比例放大」的規律和生物生長及自然現象發展的情況相似，因此在自然界中常常可以看到等角螺線，例如鸚鵡螺、銀河、熱帶低氣壓。等角螺線可利用黃金比例矩形(長與寬比例為 1.618:1 的長方形)來構成。一個黃金比例矩形，扣掉一個正方形後，剩下來依然是一個黃金比例矩形。

反覆執行「扣掉一個正方形」，就能得到圖十六的方形圖案。接著，再以每一個正方形的邊長為半徑，畫出 $1/4$ 個圓，連結起來，就可以得到圖十七的近似等角螺線。而這些正方形的邊長，恰好就是費波那契數列 $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$ 。以下為等角螺線的例子。

五、結合課程範圍

結合數列與級數(費氏數列)、等差級數(數字和)、線對稱圖形(摺紙)、尺規作圖、一元二次方程式(黃金分割)等國中數學單元，並融入海洋科學教育(鸚鵡螺)、環境教育(向日葵)、地球科學(颱風的軌跡)等議題。

六、參考資料

1. 蘇明德(2018年5月30日)。「黃金比例」在日常生活中的應用。科學月刊，第582期。檢自 https://scimonth.blogspot.com/2018/05/blog-post_65.html(Oct 01,2021)
2. 趙文敏。等角螺線及其他。數學知識網站(2000)。檢自 http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/sm/sm_20_09_1/index.html (Sep 10, 2021)
3. 黃敏晃、方述誠。黃金分割比 (Golden section)，數學知識網站 EpisteMath(2000)。檢自 http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/sm/sm_05_08_1/index.html(Sep 10, 2021)
4. 數感實驗室(2016年9月26日)。數感生活——颱風也懂數學。檢自

<https://www.facebook.com/numeracylab/> (Sep 10, 2021)

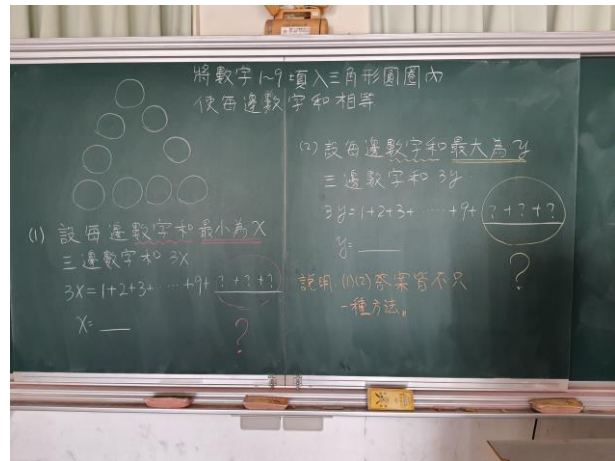
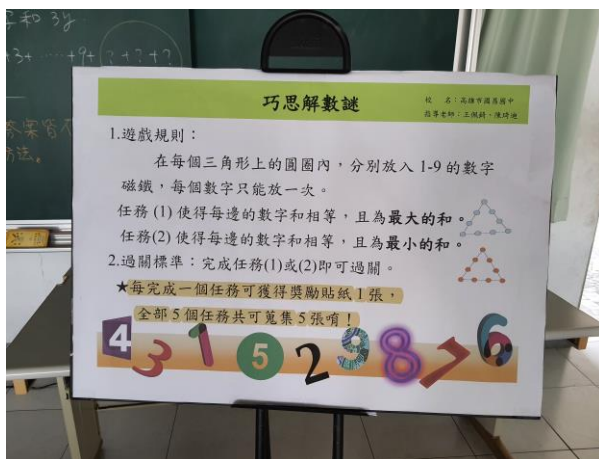
5. 維基百科。等角螺線。檢自

<https://zh.wikipedia.org/zh-hk/%E7%AD%89%E8%A7%92%E8%9E%BA%E7%BA%BF> (Oct 01, 2021)

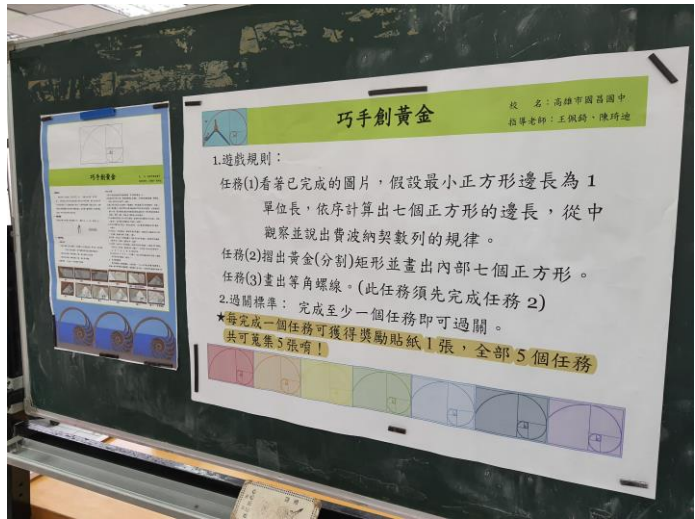
七、附件資料(活動照片)



活動照片一：闖關活動區佈置場景



活動照片二：活動一佈置場景



活動照片三：活動二佈置場景



活動照片四：活動一闖關場景



活動照片五：活動二闖關場景